

Série N°5 : Lois de probabilité, convergence en loi, Distributions, Fonction génératrice

Exercice 1

Soit f la densité de probabilité d'une v. a. X , et soit $0 \leq a < b$ deux réels positifs. On définit une v. a. $Y = X^2$.

1. Montrer que si $a < Y < b$ alors $-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} < X < \sqrt{b}$.
2. En déduire que

$$P((a, b)) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt.$$

3. Montrer que

$$P((a, b)) = \int_a^b [f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})] \frac{1}{2\sqrt{y}} dy.$$

4. Montrer que si $a < b \leq 0$ alors l'événement $[a < Y < b]$ est impossible. En déduire la densité de probabilité g de la v. a. Y .
5. Examiner le cas où X est une variable aléatoire normale réduite et centrée, puis le cas où X est une variable aléatoire normale non réduite.

Solution : Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire X , et soit $0 \leq a < b$ deux réels positifs. On définit une variable aléatoire $Y = X^2$.

1. Montrons que si $a < Y < b$ alors $-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} < X < \sqrt{b}$:
 On a $a < Y < b \Leftrightarrow a < X^2 < b$, alors $(x^2 - a = (X - \sqrt{a})(X + \sqrt{a}) > 0$ et $X^2 - b = (X - \sqrt{b})(X + \sqrt{b}) < 0$), ce qui implique le tableau de signes suivant :

	$-\infty \rightarrow -\sqrt{b}$	$-\sqrt{b} \rightarrow -\sqrt{a}$	$-\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a}$	$\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}$	$\sqrt{b} \rightarrow +\infty$
$X - \sqrt{a}$	-	-	-	+	+
$X + \sqrt{a}$	-	-	+	+	+
$(X - \sqrt{a})(X + \sqrt{a})$	+	+	-	+	+
$X - \sqrt{b}$	-	-	-	-	+
$X + \sqrt{b}$	-	+	+	+	+
$(X - \sqrt{b})(X + \sqrt{b})$	+	-	-	-	+
$(X^2 - b)(X^2 - a)$	+	-	+	-	+

le produit $(X^2 - b)(X^2 - a)$ est négatif lorsque $X \in \mathcal{D} =]-\sqrt{b}, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, \sqrt{b}[$, d'où le résultat.

2. Déduisons la relation $P((a, b)) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt$:

D'après la question 1., on a $[a < Y < b] = [-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a} < X < \sqrt{b}]$, alors

$$P((a, b)) = P([a < Y < b]) = \int_{\mathcal{D}} f(t)dt = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t)dt + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t)dt$$

3. Montrons que $P((a, b)) = \int_a^b (f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$:

D'après la question 2. on a $P((a, b)) = I(a, b) + J(a, b)$ où

$$I(a, b) = \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(t) dt$$

– pour un changement de variables, on pose $t^2 = y$, alors sur $[-\sqrt{b}, -\sqrt{a}]$ on a $t = -\sqrt{y}$ et donc $dt = -\frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ et (pour $t = -\sqrt{b}$ on a $y = b$) et (pour $t = -\sqrt{a}$ on a $y = a$) ; donc

$$I(a, b) = - \int_b^a f(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_a^b f(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

– de même, pour un changement de variables, on pose $t^2 = y$, alors sur $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ on a $t = \sqrt{y}$ et donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ et (pour $t = \sqrt{b}$ on a $y = b$) et (pour $t = \sqrt{a}$ on a $y = a$) ; donc

$$J(a, b) = \int_a^b f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

donc $P((a, b)) = I(a, b) + J(a, b) = \int_a^b f(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy + \int_a^b f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$, d'où

$$P((a, b)) = \int_a^b (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

4. – Montrons que si $a < b \leq 0$ alors l'événement $[a < Y < b]$ est impossible :
 soit $a < b \leq 0$ et supposons que l'événement $[a < Y < b]$ est possible, alors $[a < Y < b] \neq \emptyset$, donc $[a < X^2 < b] \neq \emptyset$; ce qui montre que la variable X^2 est négative dans \mathbb{R} ; ce qui est absurde car le carré d'une fonction réelle est toujours positif ; d'où l'hypothèse est fautive ; soit $[a < Y < b] = \emptyset$.
 – La densité de probabilité g de la variable aléatoire Y : soit g la densité de probabilité de la variable aléatoire Y . L'événement $[a < Y < b]$ est impossible, alors $P((a, b)) = 0$ pour tout a et b négatifs tels que $a < b \leq 0$, donc la densité de probabilité g est nulle sur l'intervalle $] -\infty, 0]$ ceci d'une part et d'autre d'après la question 2., on a

$$P((a, b)) = \int_a^b (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

pour tous a et b strictement positifs tels que $0 < a < b$ et $P((a, b)) = \int_a^b g(y) dy$ alors

$$\int_a^b (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_a^b g(y) dy$$

comme $(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} \geq 0$ et $g(y) \geq 0$ alors

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \quad \text{pour tout } y \in]0, +\infty[$$

finalement la densité g est définie par

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) & \text{pour } y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

5. – Soit X est une variable aléatoire normale réduite et centrée, alors $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$, donc la densité de probabilité de X est

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

pour tout $y \leq 0$ on a $g_{0,1}(y) = 0$ et pour $y > 0$ on a

$$\begin{aligned} g_{0,1}(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{y}{2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$g_{0,1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) & \text{pour } y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

- Soit X est une variable aléatoire normale non réduite, alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est de moyenne μ et de variance σ^2 , donc la densité de probabilité de X est

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

pour tout $y \leq 0$ on a $g_{\mu, \sigma^2}(y) = 0$ et pour $y > 0$ on a

$$\begin{aligned} g_{\mu, \sigma^2}(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \left[\exp\left(-\frac{(-\sqrt{y} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

où \cosh est la fonction cosinus hyperbolique; d'où si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$g_{\mu, \sigma^2}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) & \text{pour } y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

On peut remarquer que si on prend $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$ dans cette dernière expression de $g_{\mu, \sigma^2}(y)$, on trouvera bien l'expression de $g_{0,1}(y)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ la loi normale réduite et centrée.

□

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction caractéristique de X et on note φ_X de la variable aléatoire réelle définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

1. Montrer que si deux variables aléatoires ont même fonction caractéristique alors elles ont même loi.
2. Montrer que si X a une espérance μ et une variance σ^2 alors la fonction caractéristique de X admet comme développement de Taylor en 0 :

$$\varphi_X(t) = 1 + i\mu t - \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + \mathcal{O}(t^2).$$

3. Pour $\mu = 0$, calculer $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2}$. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la variable aléatoire X de loi normale réduite et centrée.

Solution : Soit X une variable aléatoire, la fonction caractéristique de X , notée φ_X , est définie par : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires ayant la même fonction caractéristique, montrons qu'elles ont même loi : deux variables aléatoires ont la même loi si elles ont la même moyenne et la même variance. On discutera les deux cas **variables aléatoires discrètes** et **variables aléatoires continues**.

- i) Soit $X : \Omega \mapsto J_X$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $J_X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et $J_Y = \{y_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$, alors

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{itY}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \geq 0} e^{itx_k} P([X = x_k]) = \sum_{\ell \geq 0} e^{ity_\ell} P([Y = y_\ell]) = \varphi_Y(t)$$

- Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ sont finis, alors φ_X et φ_Y sont de classes \mathcal{C}^j et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X^{(j)}(t) = \sum_{k \geq 0} (ix_k)^j e^{itx_k} P([X = x_k]) = \sum_{\ell \geq 0} (iy_\ell)^j e^{ity_\ell} P([Y = y_\ell]) = \varphi_Y^{(j)}(t)$$

en particulier pour $t = 0$ on a $(\varphi_X'(0) = \varphi_Y'(0)$ pour $j = 1$) et $(\varphi_X''(0) = \varphi_Y''(0)$ pour $j = 2$) soit

$$i\mathbb{E}(X) = i \sum_{k \geq 0} x_k P([X = x_k]) = i \sum_{\ell \geq 0} y_\ell P([Y = y_\ell]) = i\mathbb{E}(Y)$$

$$-\mathbb{E}(X^2) = - \sum_{k \geq 0} x_k^2 P([X = x_k]) = - \sum_{\ell \geq 0} y_\ell^2 P([Y = y_\ell]) = -\mathbb{E}(Y^2),$$

donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(y^2)$;
 et d'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(y))^2;$$

finalement on obtient $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$, ce qui prouve que X et Y ont la même loi.

- Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ ne sont pas finis, $\mathbb{E}(X) = \infty$ et $\mathbb{E}(Y) = \infty$ soit les variances $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$ de X et Y , respectivement ne sont pas définies; d'où X et Y ont la même loi ($\mathbb{E}(X) = \infty = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2(X) = \infty = \sigma^2(Y)$).

- ii) Soit $X : \Omega \mapsto J_X$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y$ deux variables aléatoires continues telles que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où J_X et J_Y sont des domaines inclus dans \mathbb{R} , alors

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{itY}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et X et Y ont des densités de probabilités f et g respectivement; donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathcal{D}} e^{itx} f(x) dx = \int_{\mathcal{D}'} e^{ity} g(y) dy = \varphi_Y(t)$$

où \mathcal{D} est le domaine de définition de f et \mathcal{D}' est le domaine de définition de g .

- Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ sont finis, alors φ_X et φ_Y sont de classes \mathcal{C}^j et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi_X^{(j)}(t) = \int_{\mathcal{D}} (ix)^j e^{itx} f(x) dx = \int_{\mathcal{D}'} (iy)^j e^{ity} g(y) dy = \varphi_Y^{(j)}(t)$$

en particulier pour $t = 0$ on a $(\varphi_X'(0) = \varphi_Y'(0)$ pour $j = 1$) et $(\varphi_X''(0) = \varphi_Y''(0)$ pour $j = 2$) soit

$$i\mathbb{E}(X) = i \int_{\mathcal{D}} x f(x) dx = i \int_{\mathcal{D}'} y g(y) dy = i\mathbb{E}(Y)$$

$$-\mathbb{E}(X^2) = - \int_{\mathcal{D}} x^2 f(x) dx = - \int_{\mathcal{D}'} y^2 g(y) dy = -\mathbb{E}(Y^2),$$

donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(y^2)$;
 et d'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(y))^2;$$

finalement on obtient $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(y)$ et $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$, ce qui prouve que X et Y ont la même loi.

- Si, pour $j \geq 1$, les moments $\mathbb{E}(X^j)$ et $\mathbb{E}(Y^j)$ ne sont pas finis, $\mathbb{E}(X) = \infty$ et $\mathbb{E}(Y) = \infty$ soit les variances $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$ de X et Y , respectivement ne sont pas définies; d'où X et Y ont la même loi ($\mathbb{E}(X) = \infty = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2(X) = \infty = \sigma^2(Y)$).

2. Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ et de variance σ^2 , montrons que la fonction caractéristique de X admet comme développement de Taylor en 0

$$\varphi_X(t) = 1 + i\mu t - \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + \mathcal{O}(t^2)$$

L'espérance mathématique μ et la variance σ^2 existent si $\mathbb{E}(X) < \infty$ et $\mathbb{E}(X^2) < \infty$; dans ce cas φ_X est deux fois dérivable ; et on a φ_X est développable selon Taylor en 0 :

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + \varphi'_X(0)(t - 0) + \frac{1}{2}\varphi''_X(0)(t - 0)^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

or $\varphi_X(0) = \mathbb{E}[1] = 1$, $\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}(X) = i\mu$ et $\varphi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)$, alors

$$\varphi_X(t) = 1 + \mu t - \frac{1}{2} \mathbb{E}(X^2)t^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

or d'après la propriété de Hygens, on a $\sigma^2 = \sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$ alors $\mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$, donc

$$\varphi_X(t) = 1 + \mu t - \frac{1}{2} \mathbb{E}(X^2)t^2 + \mathcal{O}(t^2) = 1 + \mu t - \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

finalement le développement de Taylor de φ_X en 0 est $\varphi_X(t) = 1 + \mu t - \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^2)$.

3. Pour $\mu = 0$, calculons $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2}$: en effet, pour $\mu = 0$, on a le développement de Taylor de φ_X en 0 devient $\varphi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^2)$ où $\varphi_X(0) = 1$; donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_X(t) - \varphi_X(0)}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

On en déduit que si X était une variable aléatoire de moyenne nulle, alors sa variance serait déterminée par la formule

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(\varphi_X(0) - \varphi_X(t))}{t^2} = \sigma^2.$$

4. Soit X la variable aléatoire de loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, calculons la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$: soit f la densité de probabilité de X , on a

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Par définition, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

donc

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

or $e^{itx} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(itx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x - (\mu - it\sigma^2))^2}{2\sigma^2} - it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$,

alors

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - (\mu - it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(-it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - (\mu - it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx \end{aligned}$$

par changement de variables, on pose $\xi = \frac{x - (\mu - it\sigma^2)}{\sigma}$, alors $d\xi = \frac{dx}{\sigma}$, donc

$$\varphi_X(t) = \exp\left(-it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi}_{=1}$$

ceci car la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ est la densité de probabilité de la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0, 1)$. Finalement, on obtient la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et

$$\varphi_{(\mu, \sigma^2)}(t) = \exp\left(-it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)).$$

En particulier, pour $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on obtient la fonction caractéristique de la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\varphi_{(0,1)}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

□

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

1. Déterminer la loi de probabilité de la v. a. $Z = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de la v. a. X sachant que la somme $S = X + Y$ a une valeur n donnée.

Solution : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

1. La loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$:

On a $X : \Omega \mapsto X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \mapsto Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $Z : \Omega \mapsto Z(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ et $X(\omega) \in \mathbb{N}$ et $Y(\omega) \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne $Z(\omega) \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $n = k + (n - k)$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$, donc l'événement $[Z = n]$ est la réunion des événements 2 à 2 disjoints $([X = k] \cap [Y = n - k])_{0 \leq k \leq n}$ soit

$$[Z = n] = \bigcup_{k=0}^n ([X = k] \cap [Y = n - k])$$

ce qui implique

$$P([Z = n]) = \sum_{k=0}^n P([X = k] \cap [Y = n - k])$$

or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors les événements $[X = k]$ et $[Y = n - k]$ sont indépendants, donc

$$P([X = k] \cap [Y = n - k]) = P([X = k]).P([Y = n - k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

on en déduit alors

$$P([Z = n]) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}$$

d'après la formule de Binôme, on a $(\lambda + \mu)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^k \mu^{n-k}$,

d'où

$$P([Z = n]) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$

finalemt, la variable aléatoire Z suit aussi la loi de Poisson de paramètre $\alpha = \lambda + \mu$ ou soit $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ est la loi de Poisson.

2. La loi conditionnelle de la variable aléatoire X sachant que la somme $Z = X + Y$ a une valeur n donnée : Déterminer la loi conditionnelle de la variable X est de calculer la probabilité conditionnelle

$$P_{[Z=n]}([X = k]) = \frac{P([Z = n] \cap [X = k])}{P([Z = n])} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

L'événement $[Z = n] \cap [X = k]$ peut être défini par $[Y = n - k] \cap [X = k]$, alors il vient

$$P([Z = n] \cap [X = k]) = P([Y = n - k] \cap [X = k])$$

et, on a

$$P([Y = n - k] \cap [X = k]) = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n \\ e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, & \text{si } k < n. \end{cases}$$

ce qui montre que

$$P_{[Z=n]}([X = k]) = \frac{e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n}$$

ou encore

$$P_{[Z=n]}([X = k]) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ est le nombre de combinaison k à k des n éléments de $\{0, 1, \dots, n\}$; ce qui prouve que la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$ de paramètres n et $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. □

Exercice 4

Soient p et q deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction B définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

- 1) Montrer que pour $p > 0$ et $q > 0$ on a : $B(p, q) = B(q, p)$.
- 2) Donner la définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

3) Soit $k > 0$ et soit f la fonction à valeurs réelles donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ k x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Trouver k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

4) Soit a un nombre réel strictement positif et soient Γ_a et Γ les deux fonctions données respectivement par :

$$\Gamma_a(p) = \int_0^a e^{-t} t^{p-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

a) Calculer $\Gamma_a(p+1)$ en fonction de a , p et $\Gamma_a(p)$. En déduire que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

b) Montrer que $\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q)$.

5) On admet la relation Eulerienne suivante : $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

a) Trouver une relation entre $B(p+1, q)$ et $B(p, q)$.

b) Calculer la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de $B(p, q)$, puis en fonction de p et q .

c) Calculer la variance et l'écart-type de la v.a. X .

6) Soit Y le vecteur aléatoire défini par $Y = (X, X, X)^T$

Déterminer la matrice de covariance du vecteur aléatoire Y .

Solution : Soient p et q deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction B définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

1) Montrons que pour $p > 0$ et $q > 0$ on a : $B(p, q) = B(q, p)$:

Par un changement de variable, on pose $\xi = 1 - t$, alors $d\xi = -dt$ et (pour $t = 1$ on $\xi = 0$) et (pour $t = 0$ on a $\xi = 1$), donc il vient

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = - \int_1^0 (1-\xi)^{p-1} \xi^{q-1} d\xi = \int_0^1 \xi^{q-1}(1-\xi)^{p-1} d\xi$$

d'où $B(p, q) = B(q, p)$ pour tous $p > 0$ et $q > 0$.

2) La définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire X : Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite densité de probabilité d'une variable aléatoire X si et seulement si

i) $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}$,

ii) $\int_{\mathcal{D}} f(t) dt = 1$.

3) Soit $k > 0$ et soit f la fonction à valeurs réelles donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ k x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

la valeur de k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X :

- i) D'abord $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $k x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$;
donc $k > 0$ car $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.
- ii) et $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$, alors $\int_{\mathbb{R}} k x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 1$, donc $k \int_{\mathbb{R}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = 1$,
soit

$$kB(p, q) = 1,$$

d'où si $k = \frac{1}{B(p, q)}$, alors pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

- 4) Soit a un nombre réel strictement positif et soient Γ_a et Γ les deux fonctions données respectivement par :

$$\Gamma_a(p) = \int_0^a e^{-t}t^{p-1}dt \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt.$$

- a) – Calculons $\Gamma_a(p+1)$ en fonction de a , p et $\Gamma_a(p)$:
Pour a un nombre réel strictement positif, alors l'intégration par partie il vient

$$\Gamma_a(p+1) = \int_0^a e^{-t}t^p dt = [-t^p e^{-t}]_0^a + p \int_0^a e^{-t}t^{p-1}dt = -a^p e^{-a} + p\Gamma_a(p)$$

d'où $\Gamma_a(p+1) = -a^p e^{-a} + p\Gamma_a(p)$ pour tout $p > 0$ et $a > 0$.

- Déduisons la relation $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$:

Faisons tendre a vers $+\infty$, alors $\lim_{a \rightarrow 0} a^p e^{-a} = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0} p\Gamma_a(p) = p\Gamma(p)$, d'où on déduit la relation suivante $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

- b) Montrons que $\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q)$:

On pose $\alpha = p+q$, alors d'après la question 4)-b), il vient $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, d'où

$$\Gamma(p+q+1) = (p+q)\Gamma(p+q), \quad \forall p, q > 0.$$

- 5) On admet la relation Eulerienne suivante : $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

- a) La relation entre $B(p+1, q)$ et $B(p, q)$:
on a

$$B(p+1, q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

d'où $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q}B(p, q)$ pour tous $p > 0$ et $q > 0$.

- b) – la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de $B(p, q)$:

Par définition, la moyenne est donnée par la formule $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \frac{1}{B(p, q)}B(p+1, q)$$

d'où la moyenne $\mathbb{E}(X) = \frac{B(p+1, q)}{B(p, q)}$.

– la moyenne de la variable aléatoire X en fonction de p et q :

D'après la question 5)-a) on a $\frac{B(p+1, q)}{B(p, q)} = \frac{p}{p+q}$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q}.$$

c) La variance et l'écart-type de la variable aléatoire X :

D'après la propriété de Hygens, on a

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - \frac{p^2}{(p+q)^2},$$

donc

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{B(p+2, q)}{B(p, q)} \end{aligned}$$

$$\text{or } B(p+2, q) = \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} B(p, q),$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \frac{B(p+2, q)}{B(p, q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} \\ &= \frac{p}{(p+q)^2(p+q+1)} [(p+1)(p+q) - p(p+q+1)] \\ &= \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sigma^2(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

L'écart-type est la racine carrée positive de la variance soit

$$\sigma(X) = \frac{1}{p+q} \sqrt{\frac{pq}{(p+q+1)}}.$$

6) Soit Y le vecteur aléatoire défini par $Y = (X, X, X)^T$, la matrice de covariance du vecteur aléatoire Y : par définition la matrice de covariance est $C_Y = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T)$ avec

$$\begin{aligned} (Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T &= \begin{pmatrix} X - \mathbb{E}(X) \\ X - \mathbb{E}(X) \\ X - \mathbb{E}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 \\ (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 \\ (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 & (X - \mathbb{E}(X))^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$C_Y = \begin{pmatrix} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \end{pmatrix}$$

or $\sigma^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ alors

$$C_Y = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \\ \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \\ \sigma^2(X) & \sigma^2(X) & \sigma^2(X) \end{pmatrix} = \sigma^2(X) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice de covariance C_Y du vecteur aléatoire Y est donnée par

$$C_Y = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall p, q > 0.$$

□

Exercice 5

- 1) Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f .
 - (a) Montrer que $\{a\} = \bigcap_{n \geq 0} [a, a + \frac{1}{n}[$.
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = P([a, a + \frac{1}{n}[) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt$ est convergente, puis calculer sa limite.
*Que peut-on en déduire?
 - (c) Montrer que si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors $P(A) = 0$.
- 2) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$.
 - (a) Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X
 - (b) Déterminer la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X
 - (c) Quelle est la relation entre ϕ_X et g_X ?
 - (d) Calculer le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ et le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ de X .

Solution :

1. Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f .

- (a) Montrons que $\{a\} = \bigcap_{n \geq 0} [a, a + \frac{1}{n}[$:

– Soit $x \in \{a\}$, alors $x = a \in [a, a + \frac{1}{n}[$ pour tout $n \geq 0$; donc $x \in \bigcap_{n \geq 0} [a, a + \frac{1}{n}[$

soit

$$\{a\} \subset \bigcap_{n \geq 0} [a, a + \frac{1}{n}[$$

– Soit $x \in \bigcap_{n \geq 0} \left[a, a + \frac{1}{n} \right]$, alors $x \in \left[a, a + \frac{1}{n} \right]$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$|x - a| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 0$$

donc pour $n \rightarrow +\infty$, on a $x = a$, soit $x \in \{a\}$; d'où $\bigcap_{n \geq 0} \left[a, a + \frac{1}{n} \right] \subset \{a\}$

finalement il vient $\{a\} = \bigcap_{n \geq 0} \left[a, a + \frac{1}{n} \right]$.

(b) – Montrons que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = P\left(\left[a, a + \frac{1}{n} \right]\right) = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt$ est convergente : on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\left[a, a + \frac{1}{n+1} \right] \subset \left[a, a + \frac{1}{n} \right]$ pour tout $n \geq 0$; donc

$$u_{n+1} = \int_a^{a+\frac{1}{n+1}} f(t) dt \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt = u_n$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, ceci d'une part et d'autre part on a $u_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ car $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}_f$ puisqu'il s'agit d'une densité de probabilité; d'où la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

– La limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$: on a $u_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt = \int_{\mathcal{D}_f} f(t) \mathbb{1}_{\left[a, a + \frac{1}{n} \right]}(t) dt$; on pose $f_n(t) = f(t) \mathbb{1}_{\left[a, a + \frac{1}{n} \right]}(t)$, alors on a

$$|f_n(t)| \leq f(t), \quad \forall t \in \mathcal{D}_f, \quad \int_{\mathcal{D}_f} f(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$$

d'après le théorème de la convergence dominée, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt = 0.$$

– Conclusion : on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\left[a, a + \frac{1}{n} \right]} f(t) dt = \int_{\{a\}} f(t) dt$$

d'où $P(\{a\}) = \int_{\{a\}} f(t) dt = 0$.

(c) Soit A est un ensemble fini ou dénombrable, alors

– si A est fini de cardinal p , alors $A = \{a_1, \dots, a_p\} = \bigcup_{k=1}^p \{a_k\}$; donc

$$P(A) = \int_A f(t) dt = \int_{\bigcup_{k=1}^p \{a_k\}} f(t) dt = \sum_{k=1}^p \int_{\{a_k\}} f(t) dt = \sum_{k=1}^p P(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^p 0 = 0$$

– si A est un ensemble dénombrable, alors $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \geq 0} \{a_k\}$; donc

$$P(A) = \int_A f(t) dt = \int_{\bigcup_{k \geq 0} \{a_k\}} f(t) dt = \sum_{k \geq 0} \int_{\{a_k\}} f(t) dt = \sum_{k \geq 0} P(\{a_k\}) = \sum_{k \geq 0} 0 = 0$$

car il s'agit d'une série de terme général $p_k = P(\{a_k\})$ qui converge.

2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$,
 – la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{k=0}^2 C_2^k 0.3^k (1 - 0.3)^{2-k} e^{ikt} \\ &= \sum_{k=0}^2 C_2^k (0.3e^{it})^k (1 - 0.3)^{2-k} \\ &= (1 - 0.3 + 0.3e^{it})^2 \\ &= (0.7 + 0.3e^{it})^2\end{aligned}$$

d'où $\phi_X(t) = \frac{1}{100}(7 + 3e^{it})^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X :

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^2 C_2^k 0.3^k (1 - 0.3)^{2-k} t^k = \frac{1}{100}(7 + 3t)^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- la relation entre ϕ_X et g_X : on a $\phi_X(t) = \frac{1}{100}(7 + 3e^{it})^2$ et $g_X(t) = \frac{1}{100}(7 + 3t)^2$, donc

$$\phi_X(t) = g_X(e^{it}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Étant donnée une variable aléatoire réelle X de moyenne μ et d'écart type σ , on définit son coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par

$$\gamma_1(X) = \mathbb{E} \left(\frac{(X - \mu)^3}{\sigma^3} \right)$$

et son coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E} \left(\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4} \right)$$

On considère le cas de X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2, 0.3)$, alors on a la moyenne $\mathbb{E}(X) = 2 * 0.3 = 0.6$ et la variance $\sigma^2(X) = 2 * 0.3 * 0.7 = 0.42$; donc le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par

$$\gamma_1(X) = \mathbb{E} \left(\frac{(X - 0.6)^3}{\sqrt{0.42}^3} \right) = \left(\frac{50}{21} \right)^{3/2} \mathbb{E} \left(\left(X - \frac{3}{5} \right)^3 \right)$$

or $\left(X - \frac{3}{5} \right)^3 = X^3 - 3 * \frac{3}{5} X^2 + 3 * \frac{9}{25} X - \left(\frac{3}{5} \right)^3 = X^3 - \frac{9}{5} X^2 + \frac{27}{25} X - \frac{27}{125}$, alors

$$\begin{aligned}\gamma_1(X) &= \left(\frac{50}{21} \right)^{3/2} \mathbb{E} \left(X^3 - \frac{9}{5} X^2 + \frac{27}{25} X - \frac{27}{125} \right) \\ &= \left(\frac{50}{21} \right)^{3/2} \left(\mathbb{E}(X^3) - \frac{9}{5} \mathbb{E}(X^2) + \frac{27}{25} \mathbb{E}(X) - \frac{27}{125} \right)\end{aligned}$$

or $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X$ et $X^2 = X(X-1) + X$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) \\ &= 0.42 + 0.36 \\ &= 0.78 \\ \mathbb{E}(X^3) &= \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)) + 3\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X) \\ &= 0 + 3 * (0.42 + 0.36) - 2 * 0.6 \\ &= 2.34 - 1.2 \\ &= 1.14\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma_1(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^{3/2} \left(1.14 - \frac{9}{5} * 0.78 + \frac{27}{25} * 0.6 - \frac{27}{125}\right) \\ &= 753/1220\end{aligned}$$

d'où $\gamma_1(X) = 753/1220 = 0.6172133998483669$. Et, le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4}\right) = \left(\frac{50}{21}\right)^2 \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{3}{5}\right)^4\right)$$

or $\left(X - \frac{3}{5}\right)^4 = X^4 - 4 * \frac{3}{5} X^3 + 6 * \frac{9}{25} X^2 - 4 * \frac{27}{125} X + \left(\frac{3}{5}\right)^4 = X^4 - \frac{12}{5} X^3 + \frac{54}{25} X^2 - \frac{108}{125} X - \frac{81}{625}$,

$$\begin{aligned}\gamma_2(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \mathbb{E}\left(X^4 - \frac{12}{5} X^3 + \frac{54}{25} X^2 - \frac{108}{125} X - \frac{81}{625}\right) \\ &= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \left(\mathbb{E}(X^4) - \frac{12}{5} \mathbb{E}(X^3) + \frac{54}{25} \mathbb{E}(X^2) - \frac{108}{125} \mathbb{E}(X) - \frac{81}{625}\right)\end{aligned}$$

or $X^4 = X(X-1)(X-2)(X-3) + 6X^3 - 11X^2 + 6X$, alors

$$\mathbb{E}(X^4) = 6\mathbb{E}(X^3) - 11\mathbb{E}(X^2) + 6\mathbb{E}(X) = 6 * 1.14 - 11 * 0.78 + 6 * 0.6 = 1.86$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma_2(X) &= \left(\frac{50}{21}\right)^2 \left(1.86 - \frac{12}{5} * 1.14 + \frac{54}{25} * 0.78 - \frac{108}{125} * 0.6 + \frac{81}{625}\right) \\ &= 50/21\end{aligned}$$

d'où $\gamma_2(X) = 50/21 = 2.380952380952383$.

□

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$.

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire X .
2. Déterminer la fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X .
3. Calculer le coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ et le coefficient d'aplatissement $\gamma_2(X)$ de X .

Solution : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$, .

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(2, 25)$, alors $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\sigma^2(X) = 25$, alors la densité de probabilité de X est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) dx.$$

2. La fonction caractéristique ϕ_X de la variable aléatoire X :

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) e^{itx} dx$$

par un changement de variables, on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $x = 2 + 5\xi$ et $dx = 5d\xi$

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) e^{it(2+5\xi)} d\xi \\ &= e^{2it} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} + 5it\xi\right) d\xi \\ &= e^{2it} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi^2 - 2 \times 5it\xi - 25t^2 + 25t^2)\right) d\xi \\ &= e^{2it} e^{-\frac{25}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - 5it)^2\right) d\xi \end{aligned}$$

par un changement de variables, on pose $y = \xi - 5it$, alors $dy = d\xi$ et il vient

$$\phi_X(t) = e^{2it} e^{-\frac{25}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

d'où $\phi_X(t) = e^{-\frac{25}{2}t^2} (\cos(2t) + i \sin(2t))$

3. Étant donnée une variable aléatoire réelle X de moyenne μ et d'écart type σ , on définit – son coefficient d'asymétrie $\gamma_1(X)$ par

$$\gamma_1(X) = \mathbb{E}\left(\frac{(X - \mu)^3}{\sigma^3}\right)$$

alors pour $\mu = 2$ et $\sigma = 5$ il vient $\gamma_1(X) = \frac{1}{5^3} \mathbb{E}((X - 2)^3)$

or

$$\mathbb{E}((X - 2)^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} (x - 2)^3 \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{50}\right) dx$$

on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $dx = 5d\xi$, $x = 2 + 5\xi$ et

$$\mathbb{E}((X - 2)^3) = 5^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

donc

$$\gamma_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

en procédant par une intégration par partie, on obtient $\mathbb{E}((X - 2)^3) = 0$, d'où $\gamma_1(X) = 0$.

– son coefficient d’aplatissement $\gamma_2(X)$ par

$$\gamma_2(X) = \mathbb{E} \left(\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4} \right)$$

alors pour $\mu = 2$ et $\sigma = 5$ il vient $\gamma_2(X) = \frac{1}{5^4} \mathbb{E}((X - 2)^4)$

or

$$\mathbb{E}((X - 2)^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} (x - 2)^4 \exp\left(-\frac{(x - 2)^2}{50}\right) dx$$

on pose $\xi = \frac{x-2}{5}$, alors $dx = 5d\xi$, $x = 2 + 5\xi$ et

$$\mathbb{E}((X - 2)^4) = 5^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^4 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

donc

$$\gamma_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^4 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

par une intégration par partie, on obtient $\gamma_2(X) = 3$.

Remarque : pour toute variable aléatoire X de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a

$$\gamma_1(X) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2(X) = 3.$$

□

Exercice 7

Soit (Ω, τ, P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur Ω qui suit la loi binomiale $B(n, p)$ de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$).

On rappelle que pour la loi binomiale $B(n, p)$:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

1. La variable aléatoire de loi binomiale est-elle discrète ou continue ? (*Justifier*)
2. Calculer la moyenne, la variance et l’écart-type de X .
3. Rappeler la définition de la fonction caractéristique ϕ d’une variable aléatoire :
 - i) discrète.
 - ii) continue.
4. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire binomiale X .
5. On pose $\psi(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.
Pour $k = 0, \dots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$: faire un tableau de valeurs de ψ , puis tracer le graphique C_ψ .
6. Étudier le cas de la variable aléatoire qui suit la loi $B(1, 0.25)$.

Solution : Considérons (Ω, τ, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω qui suit la loi binomiale $B(n, p)$ de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$). On rappelle que pour la loi binomiale $B(n, p)$: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

1. La variable aléatoire de loi binomiale est discrète car $J_X = X(\Omega)$ est de cardinal fini $n + 1$ soit $\text{Card}(X(\Omega)) = n + 1$.
2. La moyenne, la variance et l'écart-type de X : Par définition, la moyenne est donnée par l'expression

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n kP([X = k]) = \sum_{k=0}^n kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

or $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

par changement d'indice, on pose $\ell = k - 1$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} = np(p + 1 - p)^{n-1}$$

d'où $\mathbb{E}(X) = np$.

D'après la propriété de Hygens, on a $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ alors

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$$

pour cela, il reste à calculer $\mathbb{E}(X(X - 1))$:

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1)P([X = k]) = \sum_{k=0}^n k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

or $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$, alors

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^n n(n-1)C_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k}$$

par changement d'indice, on pose $\ell = k - 2$, alors

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} C_{n-2}^{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-2-\ell} = n(n-1)p^2 (p + 1 - p)^{n-2}$$

d'où $\mathbb{E}(X(X - 1)) = n(n - 1)p^2$, d'où $\sigma^2(X) = n(n - 1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1 - p)$.

Remarque : pour le cas particulier d'une variable aléatoire de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \sigma^2(X) = p(1 - p).$$

3. La définition de la fonction caractéristique ϕ_X d'une variable aléatoire : Soit (Ω, τ, P) un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ une variable aléatoire. On appelle **fonction caractéristique** de X , notée ϕ_X , toute fonction de variable réelle $t \in \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Ainsi, on a les cas suivants :

- i) Si X est une variable aléatoire discrète, alors $J_X = X(\Omega)$ est au plus dénombrable et donc

$$\phi_X(t) = \sum_{a \in J_X} e^{iat} P([X = a]).$$

- ii) Si X est une variable aléatoire continue, alors X admet une densité de probabilité f définie sur un domaine \mathcal{D} et donc

$$\phi_X(t) = \int_{\mathcal{D}} e^{it\xi} f(\xi) d\xi.$$

4. La fonction caractéristique de la variable aléatoire binomiale X : il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète alors

$$\phi_X(t) = \sum_{a \in J_X} e^{iat} P([X = a]) = \sum_{k=0}^n e^{ikt} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k (1-p)^{n-k}$$

d'où $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.

5. Posons $\psi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Pour $k = 0, \dots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$:

k	0	1	2	3	4	5
$\psi(k)$	0.2373	0.3955	0.2637	0.0879	0.0146	9.7656e-04

ainsi, on obtient le graphique C_ψ de la fonction ψ :

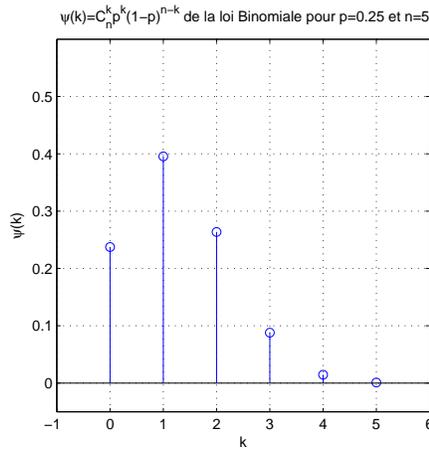


FIGURE 1 – Les courbes de $\psi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \dots, 5$, $p = 0.25$ et $n = 5$

6. Soit X la variable aléatoire de loi Bernoulli $B(1, 0.25)$, alors $p = 0.25$, $n = 1$, $\psi(1) = 0.25$, $\psi(0) = 1 - 0.25 = 0.75$ et la fonction caractéristique est définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par :

$$\phi_X(t) = 0.75 + 0.25e^{it}$$

□